Endomorphismes orthogonaux, adjoints, isométries

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Orthogonalité des endomorphismes

Matrice orthogonale

$$\boxed{A \in \mathcal{O}(n) \iff A^T.A = I_n \iff A^T = A^{-1} \iff A.A^T = I_n}$$

Déterminant

$$\boxed{A \in \mathcal{O}(n) \iff \det(A) = \pm 1}$$

Groupe spécial orthogonal

$$\boxed{A \in \mathcal{SO}(n) \iff \det(A) = 1}$$

Caractérisation par les colonnes

$$\boxed{A \in \mathcal{O}(n) \begin{array}{cc} \iff & \text{les colonnes de } A \text{ forment une b.o.n de } \mathbb{R}^n \\ \iff & A \text{ est la matrice de passage d'une b.o.n à une autre b.o.n} \end{array}}$$

Adjoints

Adjoint

Si f est un endo d'un espace <u>euclidien</u> E, $\quad \exists! f^* : E \to E, \forall (u,v) \in E^2, \quad \langle f^*(u)|v\rangle = \langle u|f(v)\rangle$

Endomorphisme autoadjoint

$$\boxed{f : E \to E \in \mathcal{S}(E) \begin{array}{cl} \iff & f^* = f \\ \iff & \forall (u,v) \in E^2, \quad \langle f(u)|v\rangle = \langle u|f(v)\rangle \end{array}}$$

Matrice d'un endomorphisme autoadjoint

$$\boxed{f \in \mathcal{S}(E) \implies [f^*]_{\text{b.o.n}} = [f]^T_{\text{b.o.n}}}$$

Isométries vectorielles

Isométrie

$$\boxed{f : E \to E \in \mathcal{O}(E) \begin{array}{cl} \iff & \forall (u,v) \in E^2, \quad \langle f(u)|f(v)\rangle = \langle u|v\rangle \\ \iff & f \text{ est linéaire et } \forall u \in E, \quad ||f(u)|| = ||u|| \\ \iff & f \text{ est linéaire et transforme une b.o.n en b.o.n} \\ \iff & [f]_{\text{b.o.n}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ \iff & f^* = f^{-1} \end{array}}$$

Analogies avec les matrices

$(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$	$(f^*)^* = f$	$(\alpha f + \beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^*$
$(A.B)^T = B^T.A^T$	$(A^T)^T = A$	$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \ B^T$

Stabilité de l'orthogonal

Autoadjoints

$$\boxed{f \in \mathcal{S}(E) \implies (F \text{ est stable par } f \implies F^\perp \text{ aussi})}$$

Isométries

$$\boxed{f \in \mathcal{O}(E) \implies (F \text{ est stable par } f \implies F^\perp \text{ aussi})}$$

Adjoint

$$\boxed{F \text{ est stable par } f \iff F^\perp \text{ est stable par } f^*}$$

Théorème spectral

Théorème spectral

$$\boxed{\begin{array}{lcl} & \iff & f \text{ est diagonalisable dans une b.o.n} \\ f \in \mathcal{S}(E) & \iff & \text{il existe une b.o.n de } E \text{ formée de vecteurs propres de } f \\ & \iff & E \text{ est la somme orthogonale des } SEP \text{ de } f \end{array}}$$

Version matricielle

Toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable

Endomorphisme autoadjoint

$$\boxed{f \in \mathcal{S}(E) \implies \begin{cases} \text{les } SEP \text{ de } f \text{ sont deux à deux orthogonaux} \\ Sp_{\mathbb{C}}(f) \subset \mathbb{R} \end{cases}}$$

Positivité

Un endo. autoadjoint f est <u>positif</u> si $\forall x \in E, \quad \langle x | f(x) \rangle \geq 0$

Une matrice symétrique M est <u>positive</u> si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T.MX \geq 0$

Un endo. autoadjoint f est <u>défini positif</u> s'il est positif et $\forall x \in E, \langle x | f(x) \rangle = 0 \implies x = 0$

Une matrice symétrique M est <u>définie positive</u> s'il est positive et $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T.MX = 0 \implies X = 0$

Endos positifs : $\mathcal{S}^+(E)$
Endos définis positifs : $\mathcal{S}^{++}(E)$

Matrices positives : $\mathcal{M}^+{}_{n,n}(\mathbb{R})$
Matrices définies positives : $\mathcal{M}^{++}{}_{n,n}(\mathbb{R})$

$$\boxed{\text{Un endo. autoadjoint } f \text{ est } \begin{cases} \text{positif} & \text{si toutes ses valeurs propres sont positives} \\ \text{défini positif} & \text{si toutes ses valeurs propres sont strictement positives} \end{cases}}$$

i.e

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} f \in \mathcal{S}^+(\mathcal{E}) & \iff & f \in \mathcal{S}(E) & \text{et} & \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^+ \\ f \in \mathcal{S}^{++}(\mathcal{E}) & \iff & f \in \mathcal{S}^+(\mathcal{E}) & \text{et} & \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \\ M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) & \iff & M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \text{et} & \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^+ \\ M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \iff & M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) & \text{et} & \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^* \end{array}}$$

Rotations et réflexions

Orientation d'une base

$\boxed{\underline{\text{En dimension finie}}, \mathcal{B}_0 \text{ et } \mathcal{B} \text{ ont la même orientation} \iff \det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}) > 0}$

Rotation

f est une <u>rotation</u> $(\in \mathcal{SO}(E))$ si
f est une isométrie et $\det(f) = 1$ i.e $[f]_{\text{b.o.n}} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$

Réflexion

f est une <u>réflexion</u> si
f est une symétrie orthogonale $/^{+}_{-}$ un hyperplan de E

Isométries et matrices du plan

$$M \in O_2(\mathbb{R}) \iff \text{elle est de la forme} \begin{cases} R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } \det(M) = +1 \\ \quad\text{ou} \\ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } \det(M) = -1 \end{cases}$$

Caractérisation des isométries du plan

$$\text{Les isométries du plan sont} \begin{cases} \text{les rotations autour de l'origine} \\ \text{les réflexions par rapport à une droite passant par l'origine} \end{cases}$$

Isométries et matrices de l'espace

f est une isométrie de l'espace $\iff \exists\theta \in \mathbb{R}$ et une b.o.n.d B tq

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \det(f) = +1$$

ou bien

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \det(f) = -1$$